Gewöhnliche Differentialgleichungen

(von Michael Didas, Wintersemester 2001/2002)

§1. Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen

Ist $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig und erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung in y, so ist das AWP zur Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ lokal eindeutig lösbar. Falls f von der Klasse C^k in t (und y) ist, so ist die lokale Lösung ebenfalls eine C^k-Funktion (und ihre Abhängigkeit von den Anfangswerten ist C^k).

Satz. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen (Phasenraum), $V \subset \mathbb{R}^k$ offen (Parameterraum), $f : I \times U \times V \to \mathbb{R}^n$ stetig mit

$$|f(t, y_1, \kappa) - f(t, y_2, \kappa)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad (t \in I, \kappa \in V \text{ und } y_1, y_2 \in U)$$

(Lipschitz-Bedingung in y). Dann gilt:

(1) Existenz- und Eindeutigkeit.
Ist $(t_0, y_0, \kappa_0) \in I \times U \times V$, so existiert eine Umgebung der Form $(t_0, y_0, \kappa_0) \in I_0 \times U_0 \times V_0 \subset I \times U \times V$ (I_0 Intervall) sowie eine stetige Funktion

$$y : I_0 \times U_0 \times V_0 \to \mathbb{R}^n,$$

so dass $y(\cdot, \eta, \kappa) : I_0 \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$y' = f(t, y, \kappa) \quad (t \in I_0), \qquad y(t_0) = \eta.$$

(2) Abhängigkeit von Anfangswerten und Parameter.
Ist $f : I \times U \times V \to \mathbb{R}^n, \quad (t, y, \kappa) \mapsto f(t, y, \kappa)$, eine C^k-Funktion in

$$\left.\begin{matrix} y \\ (y, \kappa) \\ (t, y, \kappa) \end{matrix}\right\} \text{ so ist } (t, \eta, \kappa) \mapsto y(t, \eta, \kappa) \in \mathbb{R}^n \text{ Klasse } C^k \text{ in } \left\{\begin{matrix} \eta \\ (\eta, y) \\ (t, \eta, \kappa) \end{matrix}\right. .$$

Beweisideen.

(1) Vereinfacht: $x_0 \in I$, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ global Lipschitz in y.

$$\left.\begin{matrix} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(x, y(x))dx \right\} \Leftrightarrow Ty = y$$

mit $T : C(I_0, \mathbb{R}^n) \to C(I_0, \mathbb{R}^n), \quad Ty(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x))dx$. Wähle I_0 so klein, dass $|I_0| \cdot L < 1$. Wegen

$$|Ty_1(t) - Ty_2(t)| \leq \int_{t_0}^t L|y_1(x) - y_2(x)|dx \leq |I_0| \cdot L \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty$$

ist dann T kontrahierend. Banachscher Fixpunktsatz liefert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $y = Ty$.

(2) Aus $\frac{\partial}{\partial t} y(t, \eta, \kappa) = f(t, y, \kappa)$ folgt z.B. für $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ die Gültigkeit der Variationsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y, \kappa) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = id.$$

Leite daraus Regularität ab. $\square$

§2. Trennung der Variablen

Satz. Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, U \subset \mathbb{R}$. Seien $t_0 \in I$, $y_0 \in U$ feste Punkte mit $g(y_0) \neq 0$. Dann existiert ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ um t_0, auf dem das Anfangswertproblem

$$y' = f(t)g(y), \qquad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese ergibt sich auf I_0 durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

nach $y(t)$.

Beweis. Angenommen $y : I \to \mathbb{R}$ löst das gegebene Anfangswertproblem. Dann gilt notwendigerweise $y(t) \in U$ und $g(y(t)) \neq 0$ auf einer Umgebung I_0 von t_0. Folglich

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{g(y(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad H(t, y(t)) = 0$$

mit

$$H : I_0 \times U \to \mathbb{R}, \quad H(t, y) = \int_{y_0}^{y} 1/g(\eta) d\eta - \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau.$$

Offenbar ist H eine C^1-Funktion mit $H(t_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial H}{\partial y}(y_0) = 1/g(y_0) \neq 0$. Nach Verkleinerung von I_0 und U (zu I_0 bzw. U_0) existiert daher nach dem Satz über implizite Funktionen eine C^1-Funktion

$$y : I_0 \to \mathbb{R}, \text{ so dass} \qquad H(t, y) = 0 \quad ((t, y) \in I_0 \times U_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = y(t).$$

Hieraus folgt bereits die behauptete Eindeutigkeit; um den Existenzbeweis abzuschließen, bleibt zu zeigen, dass die oben konstruierte Funktion $y : I_0 \to \mathbb{R}$ das gegebene Anfangswertproblem löst. Differenzieren der Identität $H(t, y(t)) = 0$ nach t liefert $-f(t) + \frac{1}{g(y(t))} y'(t) = 0$ oder äquivalent $y'(t) = f(t)g(y(t))$ auf I_0. $\square$

Der Satz bzw. der Beweis zeigt, dass zur Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(t)g(y)$$

folgende Strategie meist zum Erfolg (d.h. zur allgemeinen Lösung) führt: Dividiere durch $g(y)$, bilde auf beiden Seiten Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

und versuche, nach y aufzulösen. Da dies jedoch keinem rigorosen Beweis entspricht (warum?), prüfe anschließend, ob die so erhaltene Funktion y tatsächlich Lösung ist. Ferner beachte: Ist $g(\hat{y}) = 0$ für ein $\hat{y} \in \mathbb{R}$, so ist die konstante Funktion $y \equiv \hat{y}$ eine Lösung.

§3. Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

(1) Existenz von Lösungen, Struktur der Lösungsmenge.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A : I \to M_n(\mathbb{C})$ stetig, $g : I \to \mathbb{C}^n$ stetig.

(a) Die Menge aller Lösungen y der homogenen Gleichung $y' = A(t)y$ bildet einen n-dimensionalen Unterraum $L_{\text{hom}} \subset C^1(I, \mathbb{C}^n)$. Ist $t_0 \in I$, so ist $L_{\text{hom}} \to \mathbb{C}^n, \quad y \mapsto y(t_0)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen (d.h. AWP eindeutig lösbar und Lösung existiert auf ganz I). Eine Basis $y_1, \cdots, y_n$ von L_{hom} nennt man Fundamentalsystem.

(b) Die Menge aller Lösungen y einer zugehörigen inhomogenen Gleichung $y' = A(t)y + g(t)$ bildet einen affinen n-dimesionalen Unterraum $L_{\text{inh}} = y_s + L_{\text{hom}} \subset C^1(I, \mathbb{C}^n)$, wobei y_s irgendeine ("spezielle") Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Eine solche erhält man etwa durch Variation der Konstanten.

(2) Variation der Konstanten.
Sei $Y(t) = (y_1(t), \cdots, y_n(t))$ ein Fundamentalsystem der hom. Gleichung $y' = Ay$. Dann ist $y_h(t) = Y(t)c$ $(c \in \mathbb{C}^n)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung suche mit dem Ansatz

$$y_s(t) = Y(t)c(t) \quad (c \in C^1(I, \mathbb{C}^n)).$$

Wegen $y_s' = Y'c + Yc'$ und da $Y'c = AYc$ gilt, ist

$$y_s' = Ay_s + g \quad \Leftrightarrow \quad Y'c + Yc' = AYc + g \quad \Leftrightarrow \quad Yc' = g.$$

Da $Y(t) \in M_n(\mathbb{C})$ invertierbar ist (Fundamentalsystem), ist dies äquivalent zu

$$c'(t) = (Y(t))^{-1} g(t) \quad (t \in I),$$

woraus man c durch Integration erhält.

(3) Reduktion der Ordnung (d'Alembert).
Sind $y_1, \cdots, y_k$ $(k < n)$ lin. unabh. Lösungen von $y' = A(t)y$, so o.E. nach Umnumerierung $Y_0 = (y_1, \cdots, y_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$ lokal um einen Punkt regulär. Transformiere: $z = Y_0^{-1}y$. Dann

$$z' = -Y_0^{-1}Y_0'Y_0^{-1}y + Y_0^{-1}y' = Y_0^{-1}(-Y_0' + AY_0)z.$$

Die ersten k-Spalten von Y_0' und AY_0 sind identisch (nach Konstruktion). Die ersten k Spalten der Matrix $B = Y_0^{-1}(-Y_0' + AY_0)$ sind Null. Zerlege daher $z = (z_1, z_2) \in C^1(I, \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k})$. Dann bleibt zu lösen:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

mit $B_2 \in C(I, M_{n-k}(\mathbb{C}))$.

§4. Systeme mit konstanten Koeffizienten

Gegeben: $A \in M_n(\mathbb{C})$. Löse $y' = Ay$. Klar: Lösungsraum ist n-dimensionaler Unterraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

(1) Matrix-Exponentialfunktion.
Für $A \in M_n(\mathbb{C})$ beliebig konvergiert die Reihe

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = e^{At} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

absolut und lokal gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$. Formales Differenzieren liefert $Y' = \sum_{k\geq 1} k\frac{A^k t^{k-1}}{k!} = A\sum_{k\geq 0} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}$. Damit löst Y die Matrix-Differentialgleichung $Y' = AY$, und

$$y(t) = e^{At} \cdot c \quad (c \in \mathbb{C}^n) \qquad [\text{beachte: } y(0) = c]$$

ist allgemeine Lösung von $y' = Ay$ bzw. $(e^{At}e_1, \cdots, e^{At}e_n)$ ist Fundamentalsystem (lineare Unabhängigkeit bei $t = 0$ testen).

(2) Fundamentalsystem aus Jordanbasis.
Ist $(v_0, \cdots, v_k)$ eine Jordankette von A zum Eigenwert λ, d.h. lin. unabh. System mit $(A - \lambda)v_0 = 0$ und $(A - \lambda)v_j = v_{j-1}$ $(j = 1, \cdots, k)$, so sind

$$y_m(t) = \sum_{j=0}^{m} v_j t^{m-j} e^{\lambda t} \qquad (m = 0, \cdots, k)$$

$k + 1$ verschiedene Lösungen von $y' = Ay$ (Nachweis durch Einsetzen), die linear unabhängig sind $(y_m(0) = v_m)$.

Satz über Jordansche Normalform: $\mathbb{C}^n$ hat eine Basis

$$((v_0^1, \cdots, v_{k_1}^1), \cdots, (v_0^l, \cdots v_{k_l}^l))$$

bestehend aus Jordanketten von A. Bilde nach obiger Formel die zugehörigen Fundamentallösungen

$$(y_m^1)_{m=1,\cdots,k_1}, \cdots, (y_m^l)_{m=1,\cdots,k_l}.$$

Diese sind linear unabhängig (Auswerten in $t = 0$ liefert Jordanbasis), bilden also ein Fundamentalsystem.

(3) Reelles Fundamentalsystem. Im Fall $A \in M_n(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A &\;\Rightarrow\; \bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A \\ (v_0, \cdots, v_k) \text{ Jordankette zu } \lambda &\;\Rightarrow\; (\bar{v}_0, \cdots, \bar{v}_k) \text{ Jordankette zu } \bar{\lambda} \\ y_m \text{ Fundamentallösung zu } \lambda &\;\Rightarrow\; \bar{y}_m \text{ Fundamentallösung zu } \bar{\lambda} \end{aligned}$$

Lösungssystem $(y_m, \bar{y}_m)$ kann (ohne komplexen Spann zu ändern) ersetzt werden durch $(\mathrm{Re}\, y_m = \frac{1}{2}(y_m + \bar{y}_m), \mathrm{Im}\, y_m = \frac{1}{2i}(y_m - \bar{y}_m))$. Beachte:

$$\mathrm{Re}\, y_m(t) = \sum_{j=0}^{m} v_j t^{m-j} e^{\mathrm{Re}\lambda t} \cos(\mathrm{Im}\lambda t), \quad \mathrm{Im}\, y_m(t) = \sum_{j=0}^{m} v_j t^{m-j} e^{\mathrm{Re}\lambda t} \sin(\mathrm{Im}\lambda t).$$

§5. Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

(1) Existenz von Lösungen, Struktur der Lösungsmenge.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $b, a_\nu : I \to \mathbb{C}^n$ stetig ($\nu = 0, \cdots, n-1$).

(a) Die Lösungen der homogenen Gleichung $y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) y^{(\nu)}$ bilden einen n-dimensionalen Unterraum $L_{\text{hom}} \subset C^n(I, \mathbb{C})$. Für beliebiges $t_0 \in I$ ist die Abbildung $L_{\text{hom}} \to \mathbb{C}^n, \quad y \mapsto (y(t_0), \cdots, y^{(n-1)}(t_0))$ ein Vektorraumisomorphismus. Eine Basis von L_{hom} nennt man Fundamentalsystem.

(b) Die Lösungen der inhomogenen Gleichung $y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) y^{(\nu)} + b(t)$ bilden einen n-dimesnionalen affinen Unterraum $L_{\text{inh}} = y_s + L_{\text{hom}} \subset C^n(I, \mathbb{C})$, wobei y_s eine beliebige ("spezielle") Lösung der inhomogenen Gleichung bezeichnet. Diese kann z.B. über Variation der Konstanten gewonnen werden.

(2) Variation der Konstanten.
Ist $(y_1, \cdots, y_n)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so ist $y(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t)$ mit $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Suche eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i(t) y_i(t), \qquad \text{wobei } c_i \in C^k(I, \mathbb{C}) \text{ den Forderungen}$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i'(t) y_i^{(j)}(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_s^{(j)} = \sum_{i=1}^{k} c_i(t) y_i^{(j)}(t) \quad (j = 0, \cdots, n-2)$$

genügen sollen. Einsetzen liefert

$$y_s^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_i' y_i^{(n-1)} + \underline{\sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)}} = \underline{\sum_{i=1}^n c_i \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y_i^{(\nu)}} + b(t)$$

(unterstrichene Ausdrücke sind gleich). Zusammen mit obigen Forderungen ergibt sich für $c(t)$ das System

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Dieses ist immer lösbar, da Matrix für alle t regulär (Wronskideterminante).

(3) Reduktion nach d'Alembert. Ist $y \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung $y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) y^{(\nu)}$, so suche eine weitere Lösung in der Form

$$u(t) = y(t) \cdot w(t)$$

Einsetzen führt auf lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung für w': $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{\nu=j}^n \binom{n}{j} a_\nu(t) v^{(\nu-j)}(t) \right) w^{(j)}(t) = 0$. Ist $(w_1', \cdots w_{n-1}')$ Fundamentalsystem hiervon, so ist ein Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung gegeben durch $(y, y \cdot w_1, \cdots, y, w_{n-1})$. Zum Beweis der lin. Unabhängigkeit beachte $0 = (c_0 y + c_1 y w_1 + \cdots + c_{n-1} y w_{n-1})' = c_1 w_1' + \cdots + c_{n-1} w_{n-1}'$.

§6. Lineare Gleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(1) Komplexes Fundamentalsystem.
Sei $p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \in \mathbb{C}[\lambda]$ ein normiertes Polynom (d.h. Koeffizient bei der höchsten Potenz von λ gleich 1. Dann bilden die Funktionen

$$e^{\lambda_j t}, \quad te^{\lambda_j t}, \quad \cdots, \quad t^{n_j - 1} e^{\lambda_j t} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Gleichung $p\left(\frac{d}{dt}\right) y = 0$.
Beweisidee. Lineare Algebra (Zerlegungssatz) liefert

$$\ker p\left(\frac{d}{dt}\right) = \bigoplus_{j=1}^{n} \ker \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{n_j}.$$

Bleibt zu zeigen: $(t^k e^{\lambda t})_{k=1,\cdots,m-1}$ ist Fund'system von $(\frac{d}{dt} - \lambda)^m y = 0$. Wegen $(\frac{d}{dt} - \lambda)(e^{\lambda t}\varphi(t)) = e^{\lambda t} \frac{d}{dt}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathbb{R}) \arrow[r, "d/dt"] \arrow[d, "e^{\lambda t}"'] & C^\infty(\mathbb{R}) \arrow[d, "e^{\lambda t}"] \\ C^\infty(\mathbb{R}) \arrow[r, "d/dt-\lambda"] & C^\infty(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Um den Beweis zu beenden, genügt es also festzustellen, dass

$$\ker(d/dt)^m \quad \text{erzeugt wird von} \quad (1, t, \cdots, t^{m-1}).$$

$\square$

(2) Reelles Fundamentalsystem.
Hat das Polynom p reelle Koeffizienten, $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, so existiert ein Fundamentalsystem aus reellwertigen Funktionen: Mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist dann nämlich auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle (gleicher Vielfachheit m) von p. Das System von Fundamentallösungen

$$\left(t^k e^{\lambda t}, t^k e^{\bar{\lambda} t}\right)_{k=0,\cdots,m-1}$$

hat gleichen (komplexen) Spann wie das System reeller Fundamentallösungen

$$\left(t^k e^{\mathrm{Re}\lambda t} \cos(\mathrm{Im}\lambda t), t^k e^{\mathrm{Re}\lambda t} \sin(\mathrm{Im}\lambda t)\right)_{k=0,\cdots,m-1}.$$